4.2. Phương trình vi phân cấp 2

4.2.1. Định nghĩa, khái niệm

Định nghĩa 4.2: Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng

$$F(x,y,y',y'') = 0 \tag{4.14}$$

hay dạng

$$y'' = f(x,y,y') \tag{4.15}$$

a) Điều kiện tồn tại nghiệm

Định lý 4.1. Nếu hàm $f(x,y,y')$ liên tục trong miền nào đó chứa điểm (x_0,y_0,y'_0) thì tồn tại 1 nghiệm $y = y(x)$ của phương trình *(4.14)*, nghiệm ấy và đạo hàm của nó lấy tại $x = x_0$ những giá trị cho trước $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ (các điều kiện này gọi là các điều kiện đầu (hay điều kiện Cauchy), ký hiệu: $y|_{x = x0} = y_0$, $y'|_{x = x0} = y'_0$, nếu thêm điều kiện $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục thì nghiệm ấy là duy nhất.

b) Các khái niệm khác

Nghiệm tổng quát của phương trình *(4.14)* là mọi hàm $y = \varphi(x;C_1;C_2)$ thỏa mãn phương trình trên với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Khi ta gán cho C_1 và C_2 những giá trị cụ thể ta sẽ có nghiệm riêng *(4.14)*.

Nếu giải *(4.14)* hay *(4.15)* chỉ được $\phi(x;y;C_1;C_2) = 0$ thì phương trình này được gọi là tích phân tổng quát của *(4.14)* hay *(4.15)* và khi ta gán cho C_1 và C_2 những giá trị cụ thể ta sẽ có tích phân riêng *(4.14)* hay tích phân riêng *(4.15)*.

Chú ý:

Đối với phương trình vi phân có cấp cao hơn, các định nghĩa, định lý cũng được phát biểu tương tự.

4.2.2. Phương pháp giải

a) Phương trình khuyết

Xét phương trình vi phân dạng *(4.15)*, ta có các dạng sau:

i) Vế phải *(4.15)* không chứa *y, y'*, tức có dạng sau

$$y'' = f(x) \tag{4.16}$$

Cách giải:

Lấy tích phân 2 vế 2 lần liên tục ta sẽ có nghiệm tổng quát của *(4.15)*.

Ví dụ 4.8. Giải phương trình $y'' = \cos 2x$, thỏa $y_0 = y'_0 = 1$.

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}sin2x + C_1$, với y'(0)=1, ta có C_1=1, vậy $y' = \frac{1}{2}sin2x + 1$.

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}cos2x + x + C_2$, với y(0)=1, ta có C_2=1/4, vậy nghiệm riêng của phương trình vi phân $y = -\frac{1}{4}cos2x + x + \frac{1}{4}$.

ii) Vế phải *(4.14)* không chứa *y*, tức có dạng sau

$$y'' = f(x;y') \tag{4.17}$$

Cách giải:

Đặt $p = y'(x)$ suy ra $y'' = p'$ thay vào *(4.16)* được phương trình $p' = f(x;p)$ là dạng phương trình đã biết giải. Giả sử giải ra được nghiệm tổng quát là $p = y' = \varphi(x;C_1)$, ta giải tiếp phương trình này được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho.

Ví dụ 4.9: Giải phương trình $y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0$.

Giải:

$$y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0.$$

Đặt $p = y'(x)$ suy ra $y'' = p'$, ta có phương trình $p' - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$.

……

iii) Vế phải *(4.15)* không chứa *x*, tức có dạng sau

$$y'' = f(y';y'') \qquad (4.18)$$

Cách giải:

Đặt $y' = p(y)$ suy ra $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, thay thế vào *(4.18)* được phương trình $p\frac{dp}{dy} = f(y,p)$ có hàm chưa biết là *p*, biến độc lập là *y* và là phương trình vi phân đã biết giải. Giả sử giải được nghiệm tổng quát là $p = \varphi(y;C_1) = y'$ rồi giải tiếp phương trình này ta được tích phân tổng quát của *(4.18)*.

Ví dụ 4.10:

Giải phương trình vi phân $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Giải:

Đặt y'=p, suy ra y''=p', phương trình trên trở thành $p^2 + 2yp\frac{dp}{dy} = 0$

$$\Leftrightarrow p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p + 2y\frac{dp}{dy} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ pdy + 2ydp = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ \frac{dy}{y} = -2\frac{dp}{p} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ lny = -2lnp \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p = -2lnp \end{array}\right.$$

b) Phương trình tuyến tính

Dạng phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (4.17)$$

hay dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (4.18)$$

trong đó *p(x), q(x)* là các hàm của biến độc lập *x*.

Phương trình *(4.17)* gọi là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất, phương trình *(4.18)* gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng của *(4.17)*.

Khi *p, q* là các hằng số thì các phương trình vi phân *(4.17), (4.18)* gọi là các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng hay hệ số không đổi.

Một số định lý cơ bản

Định lý 4.2. Nếu $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ là 2 nghiệm của *(4.18)* thì

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, cũng là nghiệm của *(4.18)*.

Chú ý: Hai hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ gọi là *độc lập tuyến tính* nếu tỷ số $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ khác hằng số, trái lại ta có 2 hàm *phụ thuộc tuyến tính*.

Định lý 4.3. Nếu đã biết 1 nghiệm riêng $y_1(x)$ của *(4.18)*, ta có thể tìm 1 nghiệm riêng $y_2(x)$ của *(4.18)*, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$, bằng cách đặt $y_2(x) = u(x).y_1(x)$

Định lý 4.4. (*Về nguyên lý chồng chất nghiệm*):

Cho phương trình vi phân không thuần nhất

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ (*)

Nếu $y_1(x)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình vi phân $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$, và nếu $y_2(x)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình vi phân $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ thì $y = y_1(x) + y_2(x)$ là 1 nghiệm riêng của *(*)*.

Chú ý: Định lý *4.4* vẫn đúng khi vế phải của phương trình vi phân *(*)* là tổng của 1 số hữu hạn hàm.

Định lý 4.5:

NTQ của *(4.17)* = NTQ của *(4.18)* + 1 NR của *(4.17)*.

Phương pháp giải phương trình vi phân

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (4.17)$$

(*Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange*)

Xét phương trình *(4.18)*, giả sử đã biết nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \quad (*)$$

Ta đi tìm nghiệm tổng quát của *(4.17)* ở dạng *(*)* với C_1, C_2 là các hàm của x được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0 \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x) \end{cases} \quad (**)$$

Giải hệ (**), giả sử ta tìm được $C'_1 = \varphi_1(x)$, $C'_2 = \varphi_2(x)$ suy ra $C_1 = \int\varphi_1(x)dx + K_1$ và $C_2 = \int\varphi_2(x)dx + K_2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân *(4.17)* là

$$y = K_1y_1(x) + K_2y_2(x) + y_1(x)\int\varphi_1(x)dx + y_2(x)\int\varphi_2(x)dx$$

trong đó K_1, K_2 là 2 hằng số tùy ý.

Chú ý: Không làm mất tính tổng quát, ta có thể viết nghiệm tổng quát của phương trình vi phân *(4.17)* ở dạng:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_1(x)\int\varphi_1(x)dx + y_2(x)\int\varphi_2(x)dx$$

trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

Ví dụ 4.11: Giải phương trình vi phân $y'' - y' = e^{2x}$.

Giải:

Giải phương trình $y'' - y' = 0$, đặt $p=y'$ ta có $p'=y''$ vậy $y'' - y' = 0 \Leftrightarrow p' - p = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \ln p = e^C x \Rightarrow p = C.e^x$. Vì $p=y'$ nên $y'=C.e^x$, suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y=C_1e^x+C_2$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng $Y=C_1(x)e^x+C_2(x)$, ta có

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x) = 0 \\ C'_1(x)e^x = e^{2x} \end{cases}$$

vậy $C_1(x)=e^x$, $C_2(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$. Ta có nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $Y=e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$, nên nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là: y= $y=C_1e^x+C_2+e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$.

4.234. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

a) Phương trình thuần nhất

Xét phương trình vi phân

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{4.19}$$

trong đó *p, q* là 2 hằng số.

Từ phương trình *(4.19)* ta viết được phương trình

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{4.20}$$

gọi là phương trình đặc trưng của phương trình *(4.19)*.

Giả sử phương trình đặc trưng *(4.20)* có 2 nghiệm là k_1 và k_2. Khi đó, ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ và $k_1 \neq k_2$ thì nghiệm tổng quát của *(4.19)* có dạng $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$,
trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

Ví dụ 4.12: Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^2-3k+2=0$ có hai nghiệm $k_1=1$; $k_2=2$, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

Trường hợp 2: Nếu $k_1= k_2 = k\in\mathbb{R}$ thì nghiệm tổng quát của *(4.19)* có dạng

$$y = (C_1 + C_2x)e^{kx},$$

trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

Ví dụ 4.13: Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^2-4k+4=0$ có hai nghiệm $k_1=k_2=2$, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y=C_1e^{2x}+xC_2e^{2x}$.

Trường hợp 3: Nếu $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (tức k_1, k_2 là 2 nghiệm phức của phương trình *(4.20)*) thì nghiệm tổng quát của *(4.19)* có dạng

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

Ví dụ 4.14: Giải phương trình $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^2+2k+10=0$ có hai nghiệm $k_1=-1+3i$, $k_2=-1-3i$, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

Ví dụ 4.15:

Giả sử một vật *M* được đặt trên lò xo đàn hồi. Chọn trục O*y* thẳng đứng có chiều được chọn từ trên xuống dưới và gốc tọa độ O đặt ở trọng tâm của vật. Gọi *y* là độ dời tính từ vị trí cân bằng, giả sử rằng lực kéo vật về vị trí cân bằng tỷ lệ với độ dời, nghĩa là bằng $-\gamma y$ (*k*: hệ số đàn hồi của lò xo, *y*>0) còn lực cản có chiều ngược lại với chiều chuyển động và tỷ lệ với vận tốc của vật, nghĩa là bằng $-\lambda v = -\lambda \dfrac{dy}{dt}$ ($\lambda>0$). Hãy khảo sát qui luật chuyển động của vật.

Giải:

Theo định luật Newton, phương trình chuyển động của vật trên lò xo là

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma y - \lambda\frac{dy}{dt}$$

đây là phương trình vi phân dạng gì? Phương trình trên tương đương với phương trình vi phân

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{\lambda}{M}y' + \frac{\gamma}{M}y = 0 \quad \textbf{(*)}$$

chính là phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.

Phương trình đặc trưng $k^2 + \dfrac{\lambda}{M}k + \dfrac{\gamma}{M} = 0$, $\Delta = \left(\dfrac{\lambda}{M}\right)^2 - 4\dfrac{\gamma}{M} = \dfrac{1}{M^2}(\lambda^2 - 4\gamma M)$;

1) Nếu $\lambda^2 - 4\gamma M > 0$, phương trình đặc trưng có hai nghiệm

$$k_{1,2} = -\frac{\lambda}{2M} \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\gamma M}}{2M} < 0;$$

nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}$.

2) Nếu $\lambda^2 - 4\gamma M = 0$, phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k = -\dfrac{\lambda}{2M} < 0$; nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $y = C_1e^{k_1t} + tC_2e^{k_2t} = (C_1 + tC_2)e^{kt}$.

3) Nếu $\lambda^2 - 4\gamma M < 0$, phương trình đặc trưng có nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, với $\alpha = -\frac{\lambda}{2M}, \beta = \frac{\sqrt{-(\lambda^2 - 4\gamma M)}}{2M}$, nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$y = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,e^{\alpha t}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\beta t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\beta t\right)$$

$$= Ae^{\alpha t}(\sin\varphi_0\cos\beta t + \cos\varphi_0\sin\beta t) = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0).$$

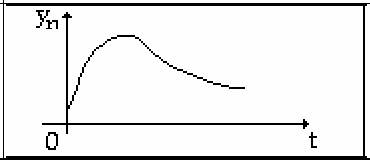
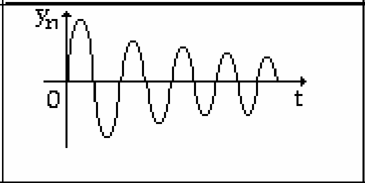
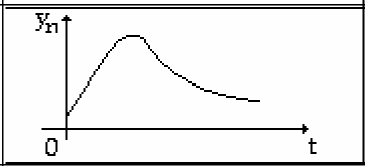
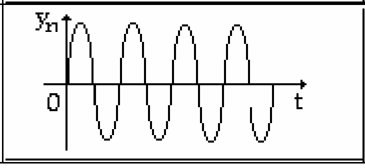
Nhận xét:

1) Không có dao động và $y\to 0$ khi $t\to\infty$.

2) Không có dao động và $y\to 0$ khi $t\to\infty$, nhưng chậm hơn trường hợp (*i*) vì có thừa số C_1+C_2t.

3) Trường hợp này có dao động, biên độ là $Ae^{\alpha t}$ vì $\alpha<0$ nên biên độ dần về 0 khi $t\to\infty$ nên đây là dao động tắt dần.

Khi chúng ta nghiên cứu các nội dung lý thuyết mạch, các môn học kỹ thuật cơ sở có khái niệm "*đáp ứng*", đáp ứng ở đây chính là nghiệm của phương trình vi phân. Với các điều kiện trong một mạch nào đó đưa ra, tìm đáp ứng tức là giải phương trình vi phân tìm nghiệm "đáp ứng" các điều kiện đó. Cái hay ở đây là nghiệm của phương trình vi phân sẽ chỉ ra dạng sóng mà "đáp ứng" được các yêu cầu bài toán. Quan sát bảng tổng hợp sau:

Trường hợp	**Nghiệm PTĐT**	**Nghiệm tổng quát**	**Dạng sóng**	**Tính chất của y**
1	2 nghiệm thực, âm	$y=C_1e^{k1t}+C_2e^{k2t}$		Tắt dần, không dao động
2	phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$	$y=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$		Dao động tắt dần
3	kép thực	$y=C_1e^{kt}+tC_2e^{kt}$		Tắt dần tới hạn
4	ảo, liên hợp	$y=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t$		Dao động, biên độ không đổi

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (4.21)$$

Qui trình giải phương trình *(4.21)*

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát *y* của phương trình thuần nhất.

Bước 2: Tìm nghiệm riêng *Y* của phương trình không thuần nhất.

Bước 3: Kết luận, nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là y*=y+Y.

Tuy nhiên để giải một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng với vế phải là một hàm bất kỳ là điều không dễ dàng, nên ở đây chúng ta chỉ xét phương trình tuyến tính không thuần nhất với vế phải có các dạng sau:

Dạng 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

- α không là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm ghiệm riêng của *(4.21)* dạng $Y=e^{\alpha x}Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức bậc *n*.

- α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng của (4.20) dạng $Y=xe^{\alpha x}Q_n(x)$.

- α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng của (4.20) dạng $Y=x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$.

Tính các đạo hàm cấp 1, cấp 2 và thay vào phương trình *(4.21)*, dùng phương pháp đồng nhất thức để tìm các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

Ví dụ 4.16:

Giải phương trình $y'' + 2y' + y = x$.

Giải:

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng $k^2+2k+1=0$, có nghiệm kép $k= -1$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y=C_1e^{-x}+xC_2e^{-x}$.

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y'' + 2y' + y = x$.

Vì vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_n(x) = e^{0x}x$, 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng $Y = e^0(Ax+B)$, $Y'=A$, $Y''=0$; thay vào phương trình không thuần nhất ta có $0+2A+Ax+B=x$, suy ra $A=1$, $B=-2$. Vậy nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $Y=x-2$.

Bước 3: Kết luận

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y^* = C_1e^{-x}+xC_2e^{-x}+x-2.$$

Dạng 2: Vế phải $f(x) = e^{\alpha x}\,[P_n(x)\cos\tilde{o}x + P_m(x)\sin\tilde{o}x]$

- $\alpha \pm i\tilde{o}$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nghiệm riêng của *(4.21)* có dạng

$$Y = e^{\alpha x}\,[Q_l(x)\cos\tilde{o}x + R_l(x)\sin\tilde{o}x]\text{ , với } l = \max(m,n).$$

- $\alpha \pm i\tilde{o}$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nghiệm riêng của *(4.21)* có dạng

$$Y = xe^{\alpha x}\,[Q_l(x)\cos\tilde{o}x + R_l(x)\sin\tilde{o}x]\text{ , với } l = \max(m,n).$$

Ví dụ 4.17: Giải phương trình: $y''-3y'+2y=e^{3x}\cos x$.

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + y = 0$, có nghiệm tổng quát $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y''-3y'+2y=e^{3x}.\cos x$.

Vì vế phải có dạng $e^{\alpha x}\,[P_n(x)\cos\tilde{o}x + P_m(x)\sin\tilde{o}x]$, với $\alpha=3$, $\beta=1$ nên $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng

$Y= e^{3x}(A\cos x+B\sin x)$,

$Y'=3e^{3x}(A\cos x+B\sin x)+ e^{3x}(-A\sin x+B\cos x)= e^{3x}((3A+B)\cos x+(B-A)\sin x)$,

$Y''=3\,e^{3x}((3A+B)\cos x+(B-A)\sin x)+ e^{3x}(-(3A+B)\sin x+(B-A)\cos x)$

$\quad =e^{3x}((8A+4B)\cos x+(2B-6A)\sin x))$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình không thuần nhất, dùng phương pháp đồng nhất thức tìm các giá trị A, B.

Bước 3: Kết luận

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là...

Bài tập: Người đọc giải quyết phần còn lại của ví dụ trên.

Chú ý:

Đối với phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có cấp cao hơn 2 thì phương pháp giải cũng tương tự với phương pháp đã trình bày ở trên.

TÓM TẮT NỘI DUNG

1. Phương trình vi phân cấp 1

- Phương trình biến phân ly

Dạng phương trình $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$,

tích phân tổng quát: $\int f_2(y)dy = -\int f_1(x)dx + C$.

- Phương trình đẳng cấp

Dạng phương trình $y' = f(x,y)$.

Cách giải: đặt $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$, đưa về phương trình biến phân ly.

- Phương trình tuyến tính

Dạng phương trình

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Cách giải:

+ Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$y = C.e^{-\int p(x)dx}$$

+ Từ nghiệm trên, đặt $C = C(x)$, lấy đạo hàm thay vào phương trình không thuần nhất tính được

$$C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right],\ k \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Phương trình Bernoully

Dạng phương trình $y'+p(x)y = q(x).y^{\alpha}$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ suy ra $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, do đó có phương trình

$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$ là phương trình đã biết giải.

- Phương trình vi phân toàn phần

Dạng phương trình $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$, với điều kiện

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

với mọi $(x,y) \in D$.

Tích phân tổng quát $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$,

hay

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

2. Phương trình vi phân cấp

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (*)$$

+ Nếu biết $y_1(x) \neq 0$ là nghiệm của (*) thì có thể tìm nghiệm $y_2(x)$ của nó độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ dạng

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int p(x)dx}$$

Chú ý: Trong tích phân trên hằng số cộng của tích phân bất định luôn lấy bằng 0.

- Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (**)$$

+ Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange:

Tìm được nghiệm của phương trình thuần nhất

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (1)$$

Ta đi tìm nghiệm tổng quát của (**) ở dạng (1) với C_1, C_2 là các hàm của x được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'y_1 & +C_2'y_2 & = 0 \\ C_1'y'_1 & +C_2'y'_2 & = f(x) \end{cases}$$

Giải hệ trên, giả sử ta tìm được $C'_1 = \varphi_1(x)$, $C'_2 = \varphi_2(x)$ suy ra

$C_1 = \int\varphi_1(x)dx + K_1$ và $C_2 = \int\varphi_2(x)dx + K_2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (**) là

$$y = K_1y_1(x) + K_2y_2(x) + y_1(x)\int\varphi_1(x)dx + y_2(x)\int\varphi_2(x)dx$$

trong đó K_1, K_2 là 2 hằng số tùy ý.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

- Phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$, trong đó p, q là 2 *hằng số*.

+ Phương pháp giải

Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Giả sử phương trình đặc trưng có 2 nghiệm là k_1 và k_2. Khi đó, ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ và $k_1 \neq k_2$ thì nghiệm tổng quát có dạng $y = C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x}$, trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

Trường hợp 2: Nếu $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$ thì nghiệm tổng quát có dạng

$$y = (C_1 + C_2x)e^{kx},$$

trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

Trường hợp 3: Nếu $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (tức k_1, k_2 là 2 nghiệm phức) thì nghiệm tổng quát có dạng $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, trong đó C_1, C_2 là 2 hằng số tùy ý.

- Phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Dạng: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

+ α không là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng của dạng $Y=e^{\alpha x}Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức cùng cấp với $P_n(x)$.

+ α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng dạng $Y=xe^{\alpha x}Q_n(x)$.

+ α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng dạng $Y=x^2\, e^{\alpha x}Q_n(x)$.

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP

1. Phương trình vi phân cấp 1

Về kiến thức

- Trình bày được khái niệm phương trình vi phân, cấp của phương trình vi phân, nghiệm phương trình vi phân.
- Giải thích được ý nghĩa nghiệm phương trình vi phân trong các bài toán kỹ thuật.

Về kỹ năng

- Nhận biết được các phương trình vi phân cấp 1.
- Giải được các phương trình: khuyết, biến phân ly, thuần nhất, tuyến tính, phương trình Bernoully.

2. Phương trình vi phân cấp 2

Về kiến thức

- Trình bày được khái niệm phương trình vi phân cấp 2.
- Giải thích được ý nghĩa nghiệm phương trình vi phân trong các bài toán kỹ thuật.

Về kỹ năng

- Giải được các phương trình: khuyết, tuyến tính hệ số hằng vế phải dạng $e^{\alpha x}P(x)$, với $\deg(P(x)) \le 2$.

BÀI TẬP

4.1. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' + sin(x + y) = sin(x - y)$

b) $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

c) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$

4.2. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' + 2xy = xe^{-x2}$

b) $y' - \frac{2y}{1+x} = (1 + x)^3$, điều kiện $y(0) = 0$

c) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

d) $y' - 4xy = 2x$, điều kiện $y(0) = 1$

4.3. Giải các phương trình vi phân

a) $y' + xy = x^3y^3$ b) $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$

4.4. Tìm 1 nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau:

a) $y'' + y' + y = 1$

b) $y'' + y' - 2y = xe^x$

c) $y'' - 2y' + y = e^x$

4.5. Tìm 1 nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau:

a) $y'' + y = e^x cosx$

b) $y'' + y = xsinx$

4.6. Giải các phương trình vi phân

a) $y'' - xe^{-x} = 0$ b) $xy'' - y' = x^2$

4.7. Giải các phương trình vi phân

a) $4y'' -20y' + 25y = 0$

b) $y'' - 4y' = 0$

c) $y'' + 5y' + 6y = 0$, thỏa điều kiện $y(0) = 1, y'(0) = 0$

4.8. Giải các phương trình vi phân

a) $y'' + 9y = 6e^{3x}$

b) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

c) $y'' - 7y' + 6y = x$

d) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

e) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$.

4.9. Các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tuyến tính

a) $y''+(x+y)y'+3y=e^x$

b) $y''+yy'+y=3x+2$

c) $(2x+5)y''+3xy'-(4x+3)y=3x+cosx$

d) $(2x+y)y''+3xy'=sinx$

4.10. Phương trình nào là phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

a) $y''+xy'-3y=9$ b) $4y''-8y=0$

c) $y''+xy'-2y=1$ d) $y''=xy'$

4.11. Giải các phương trình sau

a) $y''+5y'+4y=0$ b) $y''-3y'+2y=0$

c) $y''+y'+9y=0$ d) $y''+3y'+2y=0$

4.12. Giải các phương trình không thuần nhất sau

a) $y''+3y'+2y=e^{3x}(2x+1)$ b) $y''+3y'+2y=e^{2x}(2x^2+1)$

c) $y''+3y'+2y=e^{3x}(cosx+2sinx)$ d)

$4.y''+4y'+3y=e^{3x}(xcossx+2xsinx)$.

4.13. Giải các phương trình không thuần nhất sau

a) $y'-2xy=(x+2)y^3$ b) $y'-2x^2y=(3x-1)y^3$

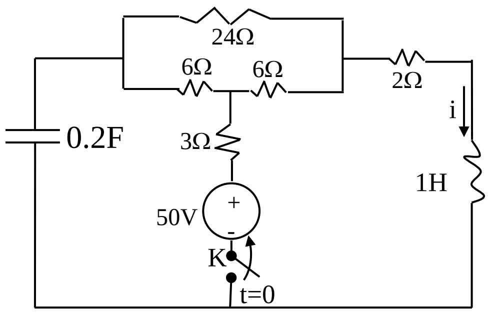
4.14. Giải các phương trình không thuần nhất sau

a) *y"-5y'+4y=e^{3x}* → $y''-5y'+4y=e^{3x}$
b) $y''-5y'+4y=e^{4x}\cos x$
c) $y''+5y'+4y=e^{-4x}$
d) $y''+4y'+3y=(x+1)e^{-x}$
e) $y''+2y'+10y=\cos 2x$
f) $y''+3y'-4y=e^{3x}+1$
g) $y''-2y'+y=xe^{x}$
h) $y''-4y'+3y=xe^{x}+e^{-x}$
i) $y''+4y'+3y=xe^{x}$
j) $y''-4y'+3y=e^{-x}$

4.15. Giải các phương trình không thuần nhất sau

a) $y'-2xy=(3x-1)y^4$
b) $y'-2xy=(2x-1)y^4$
c) $y'+3xy=2x$
d) $y'-y=x\sin 2x$

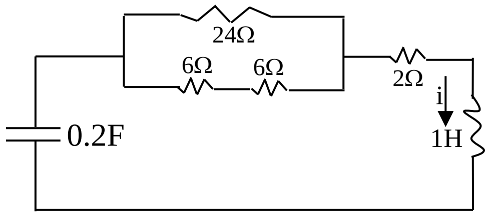
4.16. Cho mạch điện như hình vẽ, mạch đạt trạng thái thường trực ở *t*=0. Xác định *i* khi *t*>0.



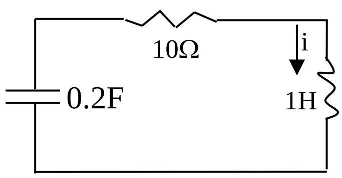
Hình 4.1

Giải:

Khi *t*=0, khóa K mở, ta có mạch không chứa luồng ngoài và đã tích trữ năng lượng ban đầu. Đáp ứng chính là đáp ứng tự nhiên. Mạch tương đương ở *t*>0 trở thành mạch (Hình 4.2) và được vẽ lại ở (Hình 4.3), trong đó nhóm điện trở của mạch tương đương một điện trở duy nhất =10Ω.



Hình 4.2



Hình 4.3

Phương trình mạch điện

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{10di}{dt}+50i=0 \qquad (1)$$

Phương trình đặc trưng và nghiệm

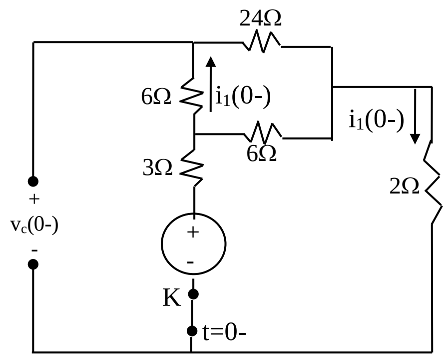
$$k^2+10k+50=0 \qquad (2)$$

có nghiệm k_1=-5-5j, k_2=-5+5j (j ở đây là đơn vị ảo của số phức), ta có

$$i(t)=e^{-5t}(A\cos 5t+B\sin 5t) \qquad (3)$$

Xác định A và B

Mạch tương đương tại t=0, được vẽ lại ở hình 4.4,



Hình 4.4

$R_{tđ}$=3Ω+(6Ω.30Ω)/(6Ω+30Ω)+2Ω=10Ω

i(0)=50V/$R_{tđ}$=5(A).

Từ kết quả (3) cho ta

i(0+)=i(0-)=5, suy ra A=5, ta lại có v_c(0-)=50-3i(0-)-6i(0-).

Trong đó $i_1(0-) = i(0-)\frac{6Ù}{6Ù+24Ù+6Ù} = 5\frac{1}{6} = \frac{5}{6}A$

$$v_c(0-)=50V-3\Omega.5A-6\Omega(5/6A)=30V \qquad (4)$$

Tại t=0^+,

$$v_c(0+) = \frac{di}{dt}(0^+) + 10i(O^+) \qquad (5)$$

$$\frac{di}{dt} = -5e^{-5t}(Acos5t + Bsin5t) + e^{-5t}(-5Asin5t + 5Bcos5t)$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0+) = -5A + 5B \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) cho ta

$$-5A+5B+10.5=30 \qquad (7)$$

thay A=5 vào (7) ta được B=1. Tóm lại

$$i(t)=e^{-5t}(5\cos 5t+\sin 5t).$$